Aufgabensammlung
Grundbegriffe der Topologie

Roland Steinbauer, Michael Kunzinger

Sommersemester 2015 (Version 21. Juni 2015)

Die vorliegende Aufgabensammlung dient als Grundlage für die *Übungen zu ,,Grundbegriffe der Topologie"*, die die gleichnamige Vorlesung begleiten. Die Übungen und die Vorlesung bilden eine untrennbare Einheit: der behandelte Stoff ist identisch, es laufen bloß die beiden jeweils passenden Teile des Lernprozesses in der Vorlesung bzw. in den Übungen ab. Ein Verständnis der einschlägigen Begriffe kann daher nur auf der Basis beider Veranstaltungen entstehen.

Die Aufgaben sind eng an den Ablauf der Vorlesung angepasst; die Kapitelnummerierung entspricht der der Vorlesung. Die Aufgabensammlung enthält eine Mischung aus „Routinebeispielen" (kürzer, weniger anspruchsvoll) und längeren, aufwendigeren Aufgaben, die zum Teil auch offen formuliert sind; speziell (aber nicht nur) für letztere empfiehlt sich ein Nachschlagen in der entsprechenden Literatur (für einen Überblick siehe die Literaturliste auf der Vorlesungshomepage) und/oder Gruppenarbeit.

1 Anschluss an die Analysis Vorlesungen. Metrische Räume 1 – die Grundlagen

1. *Bild vs. Urbild.*
   Seien X und Y Mengen mit jeweils mindestens 2 Elementen und $f : X \to Y$ eine Funktion.
   (i) Für beliebige Familien von Teilmengen $(B_i)_{i\in I}$ von Y zeige, dass das Urbild der Vereinigung (des Durchschnitts) der B_i gleich der Vereinigung (dem Durchschnitt) der Urbilder der B_i ist. Kurz gesagt zeige:
   $$f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \quad \text{und} \quad f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i).$$
   (ii) Für beliebige Familien von Teilmengen $(A_i)_{i\in I}$ von X bearbeite die analogen Fragestellungen für die Bilder. Nötigenfalls erzwinge die Gleichheit durch eine geeignete Bedingung an f.
   (iii) Für je zwei Teilmengen von X bzw Y vergleiche das (Ur)Bild der Mengendifferenz mit der Differenz der (Ur)bilder. Welche Eigenschaften von f führen zur Gleichheit.
   (iv) Führe das analoge Spiel für das Komplement einer Menge in X bzw Y durch; genauer vergleiche das (Ur)Bild des Komplements mit dem Komplement des (Ur)Bilds. Gegebenenfalls stelle wiederum die Gleichheit mittels geeigneter Bedingungen an f her.
   (v) Vergleiche eine Teilmenge von X mit dem Urbild ihres Bildes und eine Teilmenge von Y mit dem Bild ihres Urbilds. Gegebenenfalls ...

2. *Normen auf* $\mathbb{R}^n$ *(vgl. Vo. Bsp. 1.4(i),(ii)).*
   Zeige, dass die folgenden Beispiele tatsächlich Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind.
   (i) $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_1)$ wobei $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ (ii) $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$, wobei $\|x\|_\infty := \max_{1\le i\le n} |x_i|$.
   (iii) $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_p)$, wobei $\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}$ $(1 < p < \infty)$.
   Hinweis: Die Dreiecksungleichung ist genau die Minkowskische Ungleichung. Stöbere diese in der Literatur auf und verschaffe dir einen Überblick über ihre(n) Beweis(e).

3. $\| \|_2$ *für Funktionen.*
Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f(t)^2\, dt}$$

eine Norm auf $\mathcal{C}^0[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R}\, | f \text{ stetig}\}$ ist. Ist $\| \|_2$ auch eine Norm auf der Menge $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, | f \text{ stetig}\}$.
Hinweis: Hier muss die Cauchy Schwarz'sche Ungleichung für Integrale herangezogen werden. Stöbere diese in der Literatur auf und verschaffe dir einen Überblick über ihre(n) Beweis(e).

4. *Beispiele metrischer Räume (vgl. Vo. Bsp. 1.4(iii),(iv)).*

   (i) Zeige, dass auf jeder nichtleeren Menge M

   $$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases} \tag{1}$$

   eine (die sogenannte diskrete) Metrik definiert.

   (ii) Zeige, dass jeder normierte Vektorraum $(V, \| \|)$ vermöge

   $$d(x, y) := \|x - y\| \tag{2}$$

   zu einem metrischen (Vektor-) Raum wird.

5. *Norm vs. Metrik.*
Stammt *jede* Metrik auf einem Vektorraum V (im Sinne von Gleichung (2) in Bsp. 4(ii)) von einer Norm ab? Salopp gefragt: Gibt es mehr normierte oder mehr metrische Vektorräume, d.h. welcher der Begriffe ist allgemeiner?
(*Tipp:* Wie steht es mit der diskreten Metrik auf $\mathbb{R}$?)

6. *Eigenschaften offener Mengen.*
Zeige, dass in einem metrischen Raum (X, d) folgendes gilt

   (i) X und $\emptyset$ sind offen.

   (ii) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

   (iii) Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.

   Zeige durch ein explizites Gegenbeispiel (in einem möglichst einfachen metrischen Raum), dass beliebige Durchschnitte offener Mengen nicht offen sein müssen.

7. *Eindeutigkeit des Grenzwerts.*
Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ im metrischen Raum (X, d). Zeige, dass x eindeutig bestimmt ist.
Hinweis: Indirekt angenommen $x_n \to x$ und $x_n \to y$ dann folgt schon $y = x$.

8. *Charakterisierung stetiger Funktionen mittels Folgen.*
Beweise folgenden Satz aus der Analysis: Eine Abbildung $f : (X, d_x) \to (Y, d_y)$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig in $x \in X$ ist, falls für jede Folge $x_n \to x$ in X die Bildfolge $f(x_n)$ in Y gegen $f(x)$ konvergiert.

9. *Häufungswerte mittels Umgebungen.*
Ein Punkt x im metrischen Raum (X, d) heißt *Häufungswert* der Folge (x_n), falls

   $$\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N :\ d(x_n, x) < \varepsilon. \tag{3}$$

   Charakterisiere diesen Begriff mittels Umgebungen, formuliere also den Begriff Häufungswert in der Sprache der Topologie (vgl. Vo. 1.19).

2 Topologische Räume

10. *Beispiele topologischer Räume (vgl. Vo. Bsp. 2.4).*
Zeige, dass die Topologien aus Vo. Bsp. 2.4 (iv) und (v) tatsächlich die Axiome (O1)–(O3) erfüllen (und daher zu Recht Topologien genannt werden). Genauer zeige, dass
    (i) auf $\mathbb{R}$ das System $\mathcal{O}_<$ bestehen aus allen Intervallen der Form $(-\infty, a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig zusammen mit $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ und
    (ii) das System $\mathcal{O}_{\mathrm{co}} := \{A \subseteq X | \ X \setminus A \text{ endlich}\} \cup \emptyset$ auf einer beliebigen Menge X

    tatsächlich Topologien sind.

11. *Topologien auf endlichen Mengen.*
Wieviele Toplogien gibt es auf einer Menge X, die
    (i) kein Element (also $X = \emptyset$)
    (ii) ein Element
    (iii) zwei Elemente

    hat und wie sehen diese aus?

12. *Vergleich von Topologien 1 (vgl. Vo. Bem. 2.6).*
Zeige, dass die in Vo. Bem. 2.6 definierte Relation $\leq$ auf der Menge aller Topologien auf einer fixen Menge X
$$\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2 \ :\Longleftrightarrow \mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$$
eine Ordnung aber keine Totalordnung definiert.

    Tipp: Für ein Beispiel nicht vergleichbarer Topologien empfiehlt es sich Aufgabe 11(iii) genauer anzusehen.

13. *Vergleich von Topologien 2.*
Zeige, dass auf $\mathbb{R}$
    (i) $\mathcal{O}_{\mathrm{Kl}} \leq \mathcal{O}_{\mathrm{co}} \leq \mathcal{O}_{\mathrm{n}} \leq \mathcal{O}_{\mathrm{dis}}$,
    (ii) $\mathcal{O}_{\mathrm{Kl}} \leq \mathcal{O}_< \leq \mathcal{O}_{\mathrm{n}} \leq \mathcal{O}_{\mathrm{dis}}$ und
    (iii) $\mathcal{O}_<$ ist mit $\mathcal{O}_{\mathrm{co}}$ unvergleichbar

    gilt. Dabei sind (vgl. Vo. Bsp. 2.4, 2.5) $\mathcal{O}_{\mathrm{kl}}$, $\mathcal{O}_{\mathrm{co}}$, $\mathcal{O}_{\mathrm{n}}$ und $\mathcal{O}_{\mathrm{dis}}$ die Klumpen-, die kofinite, die natürliche respektive die diskrete Topologie und die Topologie $\mathcal{O}_<$ in Aufgabe 10 (i) definiert.

14. *Topologie via abgeschlossene Mengen.*
In Vo. Def. 2.3 haben wir Toplogien durch die Vorgabe des Systems der offenen Mengen definiert. Alternativ dazu kann eine Topologie auch durch Vorgabe des Systems der *abgeschlossenen* Mengen definiert werden. Zeige dazu den folgenden Satz.

    Sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ ein Teilsystem von 2^X mit den Eigenschaften

    (A1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{A}$
    (A2) Beliebige Durchschnitte von Mengen in $\mathcal{A}$ liegen wieder in $\mathcal{A}$.
    (A3) Endliche Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{A}$ liegen wieder in $\mathcal{A}$.

    Dann ist
$$\mathcal{O} := \{X \setminus A | \ A \in \mathcal{A}\}$$
eine Topologie auf X. $\mathcal{A}$ ist genau die Familie der abgeschlossenen Mengen in $(X, \mathcal{O})$ und $\mathcal{O}$ ist die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft.

15. *Basen in metrischen Räumen (vgl. Vo. Bsp. 2.10).*
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir betrachten die Topologie $\mathcal{O} := \{O \subset X |\, \forall x \in O\ \exists B_\varepsilon(x) \subseteq O\}$ (vgl. Vo. Bsp. 2.4). Zeige

 (i) Die offenen ε-Kugeln $B_\varepsilon(x)$ $(x \in X,\ \varepsilon > 0)$ bilden eine Basis der Topologie.

 (ii) Die offenen $1/k$-Kugeln $B_{1/k}(x)$ $(x \in X,\ k \in \mathbb{N})$ bilden eine Basis der Topologie.

16. *Abzählbare Basis für den $\mathbb{R}^n$. (vgl. Vo. Bsp. 2.10)*
Wir betrachten $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_n)$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass es eine abzählbare Basis für diese Topologie gibt. Unter Verwendung von Aufgabe 15 (ii) zeige, dass die offenen $1/k$-Kugeln $B_{1/k}(x)$ mit rationalen Mittelpunktskoordinaten (d.h. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in \mathbb{Q}\ \forall 1 \leq i \leq n$) eine Basis bilden. Jede dieser $B_{1/k}(x)$ ist also durch $n + 1$ rationale Zahlen bestimmt und daher ist $\{B_{1/k}(x) |\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n,\ k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis für $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_n)$.

17. *Subbasis für $\mathbb{R}$.*
Zeige, dass die Intervalle
$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} := \{(-\infty, a), (a, \infty) |\ a \in \mathbb{Q}\}$$
eine Subasis für die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$ bilden.

18. *Boxtopologie (vgl. Vo. Bsp. 2.15(ii)).*
Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$ $(i \in I,\ I$ beliebig) topologische Räume. Das (in Vo. Bsp. 2.15(ii)) angegebene System
$$\mathcal{B}_{\text{Box}} := \{\Pi_{i\in I} Y_i |\ Y_i \in \mathcal{O}_i \text{ beliebig }\}$$
erfüllt die Eigenschaften (B1) und (B3) aus Vo. Satz 2.11 und ist daher Basis einer Topologie auf $\Pi_{i\in I} X_i$.

19. *Grundeigenschaften von Umgebungsbasen.*
Beweise den Satz 2.24 aus der Vo., d.h. beweise, dass in jedem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ für ein System von Umgebungsbasen $\mathcal{W}_x$ $(x \in X)$ die drei Eigenschaften

(UB1) $\forall W \in \mathcal{W}_x :\ x \in W$

(UB2) $\forall W_1, W_2 \in \mathcal{W}_x\ \exists W_3 \in \mathcal{W}_x :\ W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$

(UB4) $\forall W \in \mathcal{W}_x\ \exists V \in \mathcal{W}_x :\ V \subseteq W$ und $\forall y \in V\ \exists W_y \in \mathcal{W}_y :\ W_y \subseteq W$.

gelten.

20. *Umgebungsbasen für metrische Räume (vgl. Vo. Bsp. 2.26(ii)).*
Zeige, dass in einem metrischen Raum die ε-Kugeln um x eine Umgebungsbasis bei x für die (von der Metrik induzierte—vgl. Vo. 2.4(i)) Topologie sind.

21. *Niemytzki-Raum (vgl. Vo. Bsp. 2.26(iii)).*
Zeige, dass die im Bsp. 2.26(ii) in der Vorlesung angegebenen Umgebungsbasen $\mathcal{W}_p$ für die Niemytzki-Topologie auf der oberen Halbebene tasächlich die einschlägigen Eigenschaften (UB1)—(UB4) erfüllen (und somit auch in diesm Fall zu Recht von einer Topologie gesprochen werden kann).

22. *Abschluss (vgl. Vo. Beob. 2.36).*
Zeige, dass für eine Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ gilt.

 (i) $\bar{A} = A \cup \partial A$

 (ii) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

23. *Charaktersisierung des Abschlusses (vgl. Vo. Prop. 2.39).*
Beweise Proposition 2.39 aus der Vorlesung also, dass der Abschluss $\bar{A}$ einer beliebigen Teilmenge A des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält.

24. *Eigenschaften des Abschlusses (vgl. Vo. 2.40).*
Beweise Proposition 2.40 aus der Vorlesung, also folgende Eigenschaften des Abschlusses einer beliebigen Teilmenge A des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$.
    - $\bar{\emptyset} = \emptyset$ $\bar{X} = X$
    - $A \subset B \;\Rightarrow\; \bar{A} \subset \bar{B}$
    - $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
    - A ist abgeschlossen genau dann, wenn $\bar{A} = A$.
    - $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

25. *Kugeln und Sphären in metrischen Räumen.*
Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Die Sphären $S_\varepsilon(x)$ und die abgeschlossenen Kugeln $K_\varepsilon(x)$ sind definiert als
$$S_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) = \varepsilon\} \quad \text{und} \quad K_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) \le \varepsilon\}.$$
Zeige, dass alle $S_\varepsilon(x)$ und auch alle $K_\varepsilon(x)$ abgeschlossen sind.
Hinweis: Zeige zunächst, dass das Äußere der offenen ε-Kugel offen ist.

26. *Rand und Abschluss der ε-Kugeln im diskreten metrischen Raum.*
Sei X eine mindestens zweipunktige Menge und d die diskrete Metrik auf X.
    (i) Bestimme für $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ die Mengen $B_\varepsilon(x)$ sowie $S_\varepsilon(x)$ und $K_\varepsilon(x)$ (siehe Definitionen in Aufgabe 25.)
    (ii) Zeige, dass die von d auf X (gemäß Vo. Bsp. 2.4(i)) induzierte Topologie die diskrete Topologie ist.
    (iii) Vergleiche $S_1(x)$ mit $\partial B_1(x)$ und $K_1(x)$ mit $\overline{B_1(x)}$. Inwiefern unterscheidet sich die Situation hier von der (vertrauten und anschaulichen) Situation in $(\mathbb{R}^n, d_2)$?

27. *Vereinigung und Inneres; Duchschnitt und Abschluss.*
Seien A und B Teilmengen des Topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$. Finde Formeln (analog zu Vo. Prop. 2.34(iv) bzw. 2.40(iv)) für
    (i) $(A \cup B)^\circ$ und
    (ii) $\overline{A \cap B}$.

    Kläre die jeweilige Situation vollständig inklusive allfälliger Beweise und Gegenbeispiele—und zwar möglichst radikaler (das geht schon in $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$!).

28. *Niemytzki-Raum, Teil 2.*
Erstelle eine ausführliche Fassung des Beweises (vgl. Vo. Beweis von Thm. 2.54, Kor. 2.55), dass der Niemytzki-Raum separabel ist, aber nicht AA2 und daher auch nicht metrisierbar (dh. seine Topologie nicht von einer Metrik induziert sein kann).

3 Konvergenz

29. *Konvergenz in einfachen Fällen.*
Wie sehen konvergente Netze in topologischen Räumen mit
    (i) der Klumpentopologie und
    (ii) der diskreten Topologie

    aus?

30. *Abschluss via Netze (vgl. Vo. Satz 3.10).*
Beweise Satz 3.10(ii) aus der Vorlesung, d.h. zeige dass
$$\bar{A} = \{x \in X |\ \exists \text{ Netz } (x_\lambda)_\lambda \text{ in } A : x_\lambda \to x\}.$$

31. *Topologie der punktweisen Konvergenz.*
Ziel der folgenden (langen) Aufgabe ist es zu zeigen, dass die punktweise Konvergenz von Funktionen nicht durch eine Metrik beschrieben werden kann. Genauer: die Topologie der punktweisen Konvergenz von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist nicht durch eine Metrik induziert (vgl. Vo. 2.4(i)).

    Wir betrachten den (reellen) Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, also
$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$
    und definieren darauf eine Topologie $\mathcal{O}$ mittels Vorgabe einer Subbasis (vgl. Vo. Satz 2.13.) $S_{t,a,b}$, wobei für $t, a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$
$$S_{t,a,b} := \{f \in \mathcal{F} |\ a < f(t) < b\}.$$
    (i) Zeige, dass der Name ,,Topologie der punktweisen Konverenz" gerechtfertigt ist, d.h. zeige, dass eine *Folge* von Funktionen $(f_n)_n$ genau dann punktweise konvergiert, wenn sie in $(\mathcal{F}, \mathcal{O})$ konvergiert.
    (ii) Zeige dass die konstante Funktion $f(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ im Abschluß $\bar{A}$ der Menge
$$A := \{f \in \mathcal{F} |\ f(x) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } x\}$$
    liegt.
    (iii) Zeige, dass es keine Folge $(f_n)_n$ in A gibt, die gegen f konvergiert. (*Hinweis:* Sei C_n die (endliche!) Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $f_n(x) \neq 0$ gilt und betrachte die Umgebung $S_{t,1/2,3/2}$ von f für ein t mit $t \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.)
    (iv) Zeige, $(\mathcal{F}, \mathcal{O})$ ist nicht AA1 und daher auch nicht metrisierbar. (*Hinweis:* verwende die Charakterisierung des Abschlusses in metrischen Räumen analog zu Vo. Satz 3.10(ii).)
    (v) Als Draufgabe konstruiere ein Netz in A, dass gegen f konvergiert. (Ein solches muss es ja wegen Vo. Satz 3.10(ii) geben! *Hinweis:* Betrachte die gerichtete Menge $\Lambda = \{M \subseteq \mathbb{R} | M \text{ endlich}\}$ mit $\subseteq$ und das Netz f_M, die charakteristische Funktion von $M \in \Lambda$.)

32. *Charakterisierung von T_1-Räumen (vgl. Vo. Bem. 3.22(ii)).*
Beweise Bemerkung 3.22(ii) aus der Vorlesung, also, dass ein topologischer Raum genau dann das Trennungsaxiom T_1 erfüllt, falls alle einpunktigen Mengen $\{x\}$ (oft auch Singletons genannt) abgeschlossen sind.

33. *Trennungseigenschaften der kofiniten Topologie.*
Sie X eine unendliche Menge. Zeige, dass die kofinite Topologie (vgl. Vo. 2.4(v) bzw. Aufgabe 10(ii))
$$\mathcal{O}_{\text{CO}} := \{A \subseteq X |\ X \setminus A \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$
    die Trennungseigenschaft T_1 besitzt, aber kein Hausdorff Raum ist und liefere so die Details zu Vo. 3.23(ii) nach.

34. *Charakterisierung von T_4-Räumen (vgl. Vo. Bem. 3.22(iv)).*
Beweise Bemerkung 3.22(iv) aus der Vorlesung, also, dass ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ genau dann das Trennungsaxiom T_4 erfüllt, falls

$$\forall\, U \in \mathcal{O}\ \forall A \text{ abgeschlossen mit } A \subseteq U\ \exists V \in \mathcal{O} : A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

gilt, also zwischen jede abgeschlossene Menge in einer offenen eine weitere offene Menge passt, sodass sogar ihr Abschluss noch in der ersten offenen Menge liegt (Skizze!).

4 Stetigkeit

35. *Stetigkeit in einfachen Fällen.*
Zeige, dass $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ auf jeden Fall stetig ist, falls $\mathcal{O}_X = 2^X$ oder $\mathcal{O}_Y$ die Klumpentopologie ist.

36. *Stetige Abbildungen nach $\mathbb{R}$.*
Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_n)$ stetig. Zeige, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ die Mengen $U = \{x \in X : f(x) > a\}$, $V = \{x \in X : f(x) < b\}$ und $W = \{x \in X : a < f(x) < b\}$ offen und die Mengen $A = \{x \in X : f(x) \geq a\}$, $B = \{x \in X : f(x) \leq b\}$, $C = \{x \in X : a \leq f(x) \leq b\}$, und $D = \{x \in X : f(x) = a\}$ abgeschlossen sind.

37. *Umformulierungen für Stetigkeit (vgl. Vo. Satz 4.4).*
Beweise Satz 4.4 aus der Vorlesung, d.h. zeige dass eine Abbildung $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ genau dann stetig ist, wenn eine der folgenden (daher äquivalenten) Bedingungen gilt.

   (i) $\forall x \in X : U \in \mathcal{U}_{f(x)} \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_x$
   (d.h. Urbilder von Umgebungen sind Umgebungen)

   (ii) $\forall A \subseteq Y$ abgeschlossen ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X
   (d.h. Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen)

38. *Stetige Abbildungen in einen Hausdorff-Raum.*
Seien f, g stetige Abbildungen von einem topologischen Raum X in einen Hausdorff-Raum Y. Zeige, dass die Menge $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen ist. Weiters zeige, dass falls f und g auf einer dichten Teilmenge von X übereinstimmen, dann gilt schon $f = g$.

39. *Lemma von Urysohn (vgl. Vo. Satz 4.14, 4.16).*
Verwandle die Beweisskizze 4.16 für das Lemma von Urysohn in einen wasserdichten Beweis. (*Hinweis:* [J], VIII,§2).

40. *Metrische Räume sind normal.*
Liefere die Details des ersten Beispiels in Vo. 3.22(vi) nach. Genauer, zeige, dass jeder metrische Raum (X, d) die Trennungseigenschaft T_4 besitzt. (Als T_2-Raum (Vo. 3.20(i)) erfüllt X auch T_1 (Vo. 3.22(i)) und ist somit per definitionem normal, falls er T_4 erfüllt.) *Hinweis:* Verwende Vo. 4.15 und betrachte für die abgeschlossenen disjunkten Teilmengen A und B von X die Funktion

$$f(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(X, B)}.$$

Dabei ist $d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ der Abstand von x zur Menge A.

5 Spurtopologie, Initiale und Finale Topologie

41. *Eigenschaften der Spurtopologie (vgl. Vo. Prop. 5.4).*
Beweise Proposition 5.4 aus der Vorlesung, d.h. zeige folgende Eigenschaften der der Spurtopologie $\mathcal{O}|_Y$ auf der Teilmenge Y des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$.

    (i) $U \in \mathcal{U}_x^Y \;\Leftrightarrow\; \exists\, W \in \mathcal{U}_x : \; U = W \cap Y$

    (ii) A abgeschlossen bzgl. $\mathcal{O}|_Y \;\Leftrightarrow\; \exists\, B$ abgeschlossen bezgl. $\mathcal{O}$: $A = B \cap Y$

    (iii) $\forall\, A \subseteq Y : \; \bar{A}^Y = \bar{A}^X \cap Y$

    (iv) Sei $(x_\lambda)_\lambda$ ein Netz in Y und $x \in Y$, dann gilt
    $$x_\lambda \to x \text{ bzgl. } \mathcal{O}|_Y \;\Leftrightarrow\; x_\lambda \to x \text{ bzgl. } \mathcal{O}$$

    (v) $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig $\Rightarrow\;$ $f|_Y : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig

42. *Innerers, Äußeres, Rand, Häufungs- und isolierte Punkte (vgl. Vo. Bem. 2.48).*
Betrachte als topologischen Raum $X = [-1, 2] \cup \{3\}$ mit der Spurtopologie von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_\mathrm{n})$. Zeige für eine geeignete Teilmenge $A \subseteq X$, etwa $A = (0, 1] \cup \{2\} \cup \{3\}$, dass sämtliche mögliche Teilmengen der von A, A^C, A', $\mathrm{Isol}(A)$, ∂A induzierten Partition (vgl. Vo. 2.48) nichtleer sind. Gib für jede der Teilmengen einen ihrer Punkte an.

43. *Spurtopologie im Niemytzki-Raum (vgl. Vo. 2.26(iii)).*
Wie sieht die von der Niemytzki-Toplogie induzierte Toplogie auf der x-Achse aus?

44. *Vererbung topologischer Eigenschaften.*
Eine Eigenschaft (E) eines toplogischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ heißt *„erblich"* falls sie mit $(X, \mathcal{O})$ auch jeder Teilraum $(Y, \mathcal{O}|_Y)$ hat. Zeige

    (i) AA1 und AA2 sind erblich, Separabilität ist nicht erblich (*Hinweis:* Aufgabe 43).

    (ii) Separabilität vererbt sich auf alle $(Y, \mathcal{O}|_Y)$ mit Y offen in X.

45. *Produkttopologie.*
Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)$ topologische Räume ($i \in I$), pr_k die Projektion von $X := \Pi_{i \in I} X_i$ auf X_k ($k \in I$; $\mathrm{pr}_k : (x_i)_i \mapsto x_k$) und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein weiterer topologischer Raum.

    Zeige, dass eine Abbildung $f : Y \to X$ genau dann stetig bzgl. $\mathcal{O}_Y$ und der Produkttopologie auf X ist, wenn alle $\mathrm{pr}_k \circ f$ stetig sind.

    Anmerkung: Die $\mathrm{pr}_k \circ f$ sind gerade die „Komponentenfunktionen" f_k von f, wenn die Schreibweise $f(y) = (f_i(y))_i$ verwendet wird. Obige Eigenschaft ist neben Vo. Prop. 5.12 gerade der „Witz" der Produkttopologie! Überlege, was beim Beweis schiefgeht, falls X statt mit der Produkttopologie mit der Boxtopologie versehen wird.